

L'épreuve comporte trois exercices et un problème

Exercice 1 04 points (série E uniquement)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on considère les points : $A(-4;6;-1)$; $B(1;2;2)$; $C(-1;4;3)$.

1. (a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés 0,5pt
 (b) Calculer l'aire du triangle ABC 0,5pt
2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC) 1pt
3. Soit I le milieu de $[AC]$, et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I .
 (a) Démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires 1pt
 (b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et puis calculer son aire. 1pt

Exercice 2 04 Points (série C uniquement)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 ,
où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p . 0,5pt
2. Démontrer que : $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$. 0,5pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$, où n est un entier naturel.
 (a) Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé.
 (On pourra utiliser la question 2) 0,5pt
 (b) Exprimer n en fonction de p . 0,5pt
 (c) Établir que p vérifie la relation : $3 + 2p - p^2 = 0$ 1pt
 (on utilisera le fait que $4S = 4n^2$)
 (d) Dédire de c) p et puis n . 0,5pt

Exercice 3 5 Points Un dé cubique pipé est tel que :

Deux faces sont marquées 2 ;

trois faces sont marquées 4 et une face est marquée 6.

La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i

1. Calculer p_2 , p_4 , p_6 . 1,5pt
2. On suppose dans la suite que $p_2 = \frac{1}{6}$; $p_4 = \frac{1}{3}$ et $p_6 = \frac{1}{2}$
 On lance deux fois de suite le dé précédent,
 On note i le résultat du premier lancer et j le résultat du 2^{ème} lancer.
 On définit une variable aléatoire X qui au couple $(i;j)$ associe le nombre i
 (a) Déterminer l'univers image de X 1pt
 (b) Déterminer la loi de probabilité de X . 1,5pt

PROBLEME 12 points

Le problème comporte trois parties A , B et C obligatoires. La partie C est indépendante .

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f . 0,75pt
- (b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente T_O en O . 0,75pt
- (c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f) . 0,5pt
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. 0,5pt
- (b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative. Montrer que pour tout x de I , $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 0,5 pt
3. Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g) . (on prendra 2cm comme unité sur les axes de coordonnées) 1,5pt
4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par : $U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] dx$
- (a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul, $U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$ 1pt
- (b) Calculer la limite de la suite U_n et interpréter graphiquement le résultat. 0,75pt

Partie B

1. Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et T la translation de vecteur $\vec{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. On pose : $\varphi = T \circ S$.
 - (a) Donner la nature de l'application φ . 0,5pt
 - (b) Construire l'image par φ de la courbe (C_f) . 0,75pt
2. On considère :
 - les vecteurs : $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$
 - la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$,
 - et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ')
 - (a) Vérifier que le triplet $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme un repère orthogonal du plan. 0,25pt
 - (b) Montrer que dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le vecteur $\vec{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\vec{OA} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, où $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont des vecteurs colinéaires à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ que l'on précisera. 0,5pt
 - (c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ') . Montrer que $\vec{V}_2 = 2\vec{HH'}$. En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$ 1pt
où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur.
 - (d) Montrer que $T = T_1 \circ S'$ 0,25pt

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit (D) la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan (P) ont pour affixes respectives z et $1 - i$.

1. Exprimer en fonction de z , la distance de M à la droite (D) . 0,5pt

2. On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$.

Pour tout réel m strictement positif, (F_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (Γ_m) suivante : $|z - 1 + i| = m|\bar{z} + z - 4|$.

(a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m) . 1pt

(b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_m) 1pt